TECHNIQUES & MÉTHODES S03

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

ÉTUDE DE FONCTIONS

Le plan d'étude d'une fonction est comme suit :

[1] Ensemble de définition, ensemble d'étude
[2] Étude de la continuité (si nécessaire)
[3] Étude de la dérivabilité (si nécessaire)
[4] Variations
[5] Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition
[6] Tracé de la courbe représentative Γ_f.

■ ■ ■ Domaine de définition et domaine d'étude

Domaine de définition

La fonction à étudier est construite à par opérations, à partir de fonctions usuelles.
Vous en déduisez le domaine de définition D_f de f. En général, les théorèmes "OPA" sur les fonctions continues ou dérivables permettent directement à la continuité et à la dérivabilité de f.

Exemple : $f(x) = \ln[x(x-1)]$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Domaine d'étude

Lorsque f est T-périodique, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur T, par exemple $D_f \cap [0, T[$, et compléter par symétrie.
Il est possible de restreindre le domaine d'étude lorsque f est paire, impaire. Plus généralement, s'il existe $a \in D_f$ tel que

- ▷ si pour tout x, $f(2a-x) = f(x)$, alors la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de Γ_f. On peut restreindre l'étude à $D_f \cap [a, +\infty[$ et compléter ensuite par symétrie.
- ▷ si pour tout x, $f(2a-x) = 2f(a)-f(x)$, alors le point $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ est centre de symétrie de Γ_f. On peut restreindre l'étude à $D_f \cap [a, +\infty[$ et compléter ensuite par symétrie.

Exemple : La fonction $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ par opérations algébriques. De plus, f est paire et π-périodique. On restreint l'étude à $[0, \pi/2]$.

■ ■ ■ Étude de la continuité aux points particuliers

Parfois les théorèmes "OPA" sur les fonctions continues ne permettent pas de conclure. Des études particulières sont alors nécessaires. C'est le cas, notamment, lorsque la fonction f est définie par des expressions différentes à gauche et à droite d'un point a.

Exemple : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(0) = 0$, et pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $f(x) = \begin{cases} x(1-\ln x) & \text{si} \quad x > 0 \\ x\ln(1-1/x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

En ce cas, vous utilisez les limites à droite et à gauche :

Proposition.— si f est définie au point a.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \begin{cases} \bullet \quad \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \end{cases}}$$

Exercice 9 : Étudiez la continuité de la fonction définie dans l'exemple précédent.

Exercice 10 : Étudiez la continuité de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

■ ■ ■ Étude de la dérivabilité

Comme pour la continuité, la question est souvent réglée par OPA sur des fonctions dérivables. Néanmoins, une étude particulière est parfois nécessaire.

Pour étudier la dérivabilité en un point a du domaine de définition, vous pouvez

- revenir à la définition et étudier la limite des taux de variations $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- étudier les dérivées à gauche et à droite au point a : lorsqu'elles existent et sont finies, il s'agit des limites :

$$f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Proposition.— S'il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $f'_g(a) = f'_d(a) = d$, **alors**

$$f \text{ est dérivable au point } a \text{ et } f'(a) = d.$$

Vocabulaire : *Si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent mais sont différentes, on dit que le graphe de f présente un* ***point anguleux****.*

Exercice 11 : Étudiez la dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.

Théorème.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue dans I et dérivable dans $I \setminus \{a\}$.

- **S'**il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{x\to a^-} f'(x) = d$, **alors** f est dérivable à gauche au point a et $f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$.
- **Si** $\lim_{x\to a^-} f'(x) = \pm\infty$, **alors** f n'est pas dérivable à gauche en a et $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$.

Remarque : On a bien sûr un énoncé analogue pour la dérivée à droite.

▪▪▪ Variations

Vous résolvez l'inéquation $f'(x) \geq 0$. Vous en déduisez, grâce au **Théorème ??**, les variations de f.

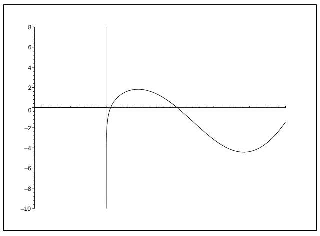
Exercice 12 : Étudiez les variations de $f(x) = x + \sqrt{3x(8-x)}$.

▪▪▪ Étude aux bornes

L'étude des branches infinies sert à préciser l'allure de la courbe représentative d'une fonction au voisinage des bornes de l'intervalle. Ces bornes peuvent être réelles ou infinies. Nous distinguons deux notions : les asymptotes et les branches paraboliques.

▪▪▪ Si a est une borne réelle du domaine de définition

Il s'agit de d'étudier $\lim_{x\to a} f(x)$, où a est une borne réelle du domaine de définition. On suppose de plus que f n'est pas définie au point a.



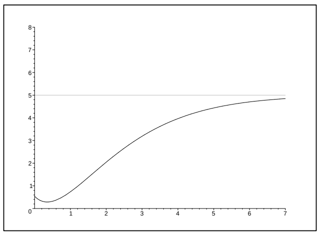
Définition : *S'il existe un nombre réel $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, on dit que f est prolongeable par continuité au point a.*

Définition : *On dit que la droite d'équation $x = a$ est* ***asymptote verticale*** *à $\mathscr{C}_f$ si $\lim_{x\to a} f = \pm\infty$.*

Exemple : La fonction $\ln(x-2) + x \sin x$ admet la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale.

▪▪▪ Si $+\infty$ est une borne du domaine de définition

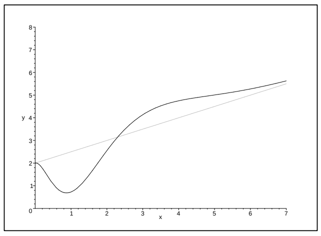
Asymptote horizontale



Définition : *On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est* ***asymptote horizontale*** *en $+\infty$ à $\mathscr{C}_f$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.*
On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est ***asymptote horizontale*** *en $-\infty$ à $\mathscr{C}_f$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.*

Exemple : La fonction $5 - \exp(-x + \sqrt{3x+1})$ admet la droite d'équation $y = 5$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

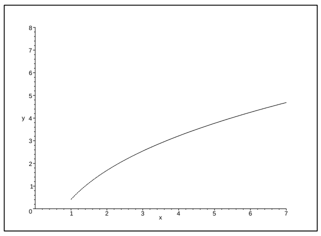
Asymptote oblique



Définition : *On dit que la droite d'équation* $y = a\,x + b$ *(*$a \in \mathbf{R}^\star$*,* $b \in \mathbf{R}$*) est* ***asymptote oblique*** *en* $+\infty$ *à* $\mathscr{C}_f$ *si* $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0$.
On dit que la droite d'équation $y = a\,x + b$ *(*$\in \mathbf{R}^\star$ *et* $b \in \mathbf{R}$*) est* ***asymptote oblique*** *en* $-\infty$ *à* $\mathscr{C}_f$ *si* $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0$.

Exemple : La fonction $2 + \frac{1}{2}\,x + 5x^2(x-2)\,\exp(-x)$ admet la droite d'équation $y = 2 + \frac{1}{2}\,x$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

Branche parabolique de direction (Ox)

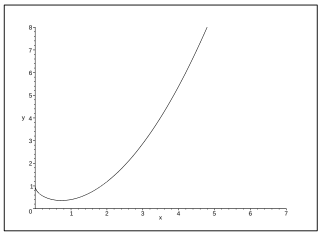


Définition : *On dit que* $\mathscr{C}_f$ *présente une* ***branche parabolique de direction asymptotique*** (Ox) *en* $+\infty$ *si :*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Exemple : La fonction $\ln x + \sqrt{2\,x} - 1$ présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.

Branche parabolique de direction (Oy)

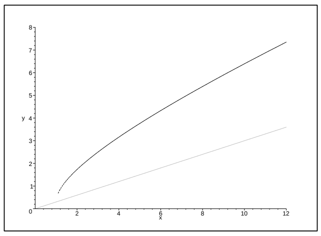


Définition : *On dit que* $\mathscr{C}_f$ *présente une* ***branche parabolique de direction asymptotique*** (Oy) *en* $+\infty$ *si :*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

Exemple : La fonction $1 - \sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$ présente une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.

Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$



Définition : *On dit que* $\mathscr{C}_f$ *présente une* ***branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation*** $y = ax$ *en* $+\infty$ *si :*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$

Exemple : Le graphe de la fonction $\frac{x}{2} + \sqrt{2\,x - 2}$ présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ en $+\infty$.

■ ■ ■ Recherche des branches infinies

Pour l'étude des branches infinies, pensez avant tout à utiliser les définitions, car l'énoncé vous guide souvent. Si ce n'est pas le cas, vous procédez de la manière suivante :

- Au voisinage d'un point $a \in \bar{I}$ (une borne réelle de l'intervalle) :
  $\rightsquigarrow$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.
- Au voisinage d'une borne infinie de l'intervalle, par exemple $+\infty$:
  $\rightsquigarrow$ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale.
  - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, il faut poursuivre l'analyse ...
    ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox)
    ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)
    - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^\star$, il faut poursuivre l'analyse ...
    ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$

$\rightsquigarrow$ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

Exercice 13 : Recherchez les asymptotes obliques des courbes d'équations

1. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

2. $y = \ln(3 + \operatorname{sh} x)$

▪▪▪ Tracé de la courbe

La figure doit comporter les tangentes horizontales, les tangentes particulières, les asymptotes.